INFINITÉSIMOS

$f(x)$ es un infinitesimo en un punto (a, por ej.) si se verifica que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$

Infinitésimos equivalentes si el límite de su cociente es 1

Cuando 2 infinitésimos son equivalentes y uno aparece <u>**MULTIPLICANDO O DIVIDIENDO**</u> en un límite, se puede sustituir por su equivalente y el límite no varía.

INFINITÉSIMOS EQUIVALENTES + IMPORTANTES

$x \to 0$

$x \sim \operatorname{sen} x$ $\quad$ $x \sim \operatorname{tg} x$ $\quad$ $x \sim \ln(1+x)$

$x \sim \operatorname{arcsen} x$ $\quad$ $x \sim \operatorname{arctg} x$ $\quad$ $1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$

$x \sim e^x - 1$

$x \to 1$ $\quad$ $x - 1 \sim \ln x$

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{3x} \to$ sustituyo $\dfrac{\operatorname{sen} 0}{3 \cdot 0} = \dfrac{0}{0} \to$ indeterminado

En entorno cercano a 0, $\operatorname{sen} x \sim x$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{3x} \to$ simplifico $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{L(x+1)}{x} = \dfrac{x}{x} = 1$ $\quad$ $\ln(x+1) \sim x$

3) $\lim_{x\to 3} \frac{tg(x^2-9)}{x-3}$ → sustituyo $\frac{tg(3^2-9)}{3-3}$ $\frac{tg(0)}{0} = \frac{0}{0}$

Pero x tiende a 3, no sale en la tabla. No importa.

Cuando $x \to 0$
$x \sim tg(x)$

Lo q' importa es argumento de tg.

Si tengo $\lim_{x\to 3} tg(x-3)$ → $3-3=0$

esto es 0

Siempre q' argumento tienda a 0, la tg de algo, de ese algo que tiende a 0 es similar a ese algo.

$\lim_{x\to 3} \frac{tg(x^2-9)}{x-3}$ → el argumento tiende a 0

la tg. de ese algo se moverá como el argumento x^2-9

Nos quitamos la tg.

$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \frac{(x+3)(x-3)}{(x-3)} = x+3$

$\lim_{x\to 3} (x+3) = 3+3 = 6$

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN CONTINUA

Consideramos una func definida en su dominio, que es real, en R

$$f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Decimos que es continua en un punto a del dominio, si dado un ε mayor que 0, existe un δ mayor que 0 tal que siempre que el módulo de $x-a$ sea menor que δ y x pertenezca al dominio, entonces $f(x)-f(a)$ sea menor que ε.

... dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que siempre que $|x-a| < \delta$, $x \in D$, entonces $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$

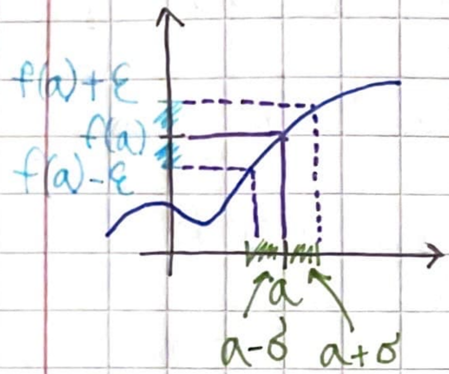
Decimos que f es continua en D si es continua para todo $a \in D$.

UNA FUNCIÓN ES CONTINUA EN UN PUNTO SI EXISTE EL LÍMITE EN ESE PUNTO Y COINCIDE CON EL VALOR DE LA FUNCIÓN EN DICHO PUNTO.

$$f(x) \text{ continua en } a \iff \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

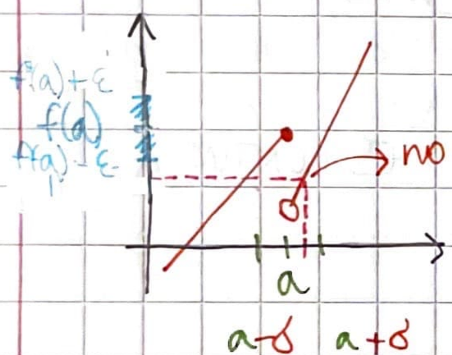
Hay que verificar 3 condiciones:

1) Existe el límite de la func en ese punto (existen los límites laterales en ese punto y son iguales y finitos.
2) La func está definida en ese punto
3) El valor de la func y el límite de la func en ese punto son iguales.



En un entorno de a todos los puntos van dentro de un f(a) +ε o -ε, están dentro de ese entorno.

FUNCION NO CONTINUA



Discontinuidad evitable — Existe límite en un punto, pero no coincide con el valor de la func. $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$

Discontinuidad inevitable — Existen los límites laterales en un punto y son ≠ o infinitos

↳ Salto finito
$$\begin{cases} \lim_{x \to a} f(x) = K \\ \lim_{x \to a} f(x) = R \end{cases} \Rightarrow \text{Salto } K-R$$

↳ Salto Infinito
$$\begin{cases} \lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \\ \lim_{x \to a} f(x) = +-\infty \end{cases} \Rightarrow \text{Salto } \infty$$

Una funç es continua en un intervalo $[a, b]$ si es continua en todos sus puntos.

EJEMPLOS

1) $f(x) = x^2 \longrightarrow$ ¿Es continua en $x=3$?

Veo cuanto vale $f(3)$

$$f(3) = 3^2 = 9$$

Veo cuanto vale el límite cuando $x \to 3$

$$\lim_{x \to 3} x^2 = 3^2 = 9$$

COINCIDEN $9 = 9 \Rightarrow$ ES CONTINUA

2) $f(x) = \frac{1}{x} \longrightarrow$ ¿Es continua?

Hay que revisar donde puede haber problema. Aquí el denom. no puede ser 0, $x \neq 0$

Sé que no existe $f(0)$

Si estudio el límite cuando $x \to 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{0} = +-\infty \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = \infty$$

son $\neq$

$\nexists \lim_{x \to 0}$

DISCONTINUIDAD INEVITABLE DE SALTO INFINITO

3) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x<1 \\ x & \text{si } x=1 \\ x+2 & \text{si } x>1 \end{cases}$

$\text{si } x<1 \longrightarrow$ Es una recta, no hay problema

$\text{si } x=1 \longrightarrow$ 1^{er} cuadrante

$\text{si } x>1 \longrightarrow$ Otra recta

El problema podría estar donde salta, en el 1.

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2 \qquad \lim_{x \to 1^+} x+2 = 3 \qquad 2 \neq 3$

DISCONTINUIDAD INEVITABLE DE SALTO FINITO TAMAÑO 1

4) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x<2 \\ 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

$\lim_{x \to 2^-} = 3 \qquad \lim_{x \to 2^+} x+1 = 3 \qquad 3 = 3$

FUNCIÓN CONTINUA.

5) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{si } x<1 \\ 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

$\lim_{x \to 1^+} 2 \qquad \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1} \qquad \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

DISCONTINUIDAD INEV. DE SALTO INFINITO.

6) $$f(x)=\begin{cases} 2x & \text{si } x<2 \\ x+2 & \text{si } x>2 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2^-} 2x = 4$$

El límite existe, pero no está definido $f(2)$

$$\lim_{x\to 2^+} x+2 = 4$$

DISCONTINUIDAD EVITABLE

7) Hallar el valor de $f(x) = \dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$ en $x=3$ para lograr que la funç sea continua.

$f(3)$ no existe porque anularía el denominador.

Estudio el límite cuando $x\to 3$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-5x+6}{x-3} \quad \frac{3^2-5\cdot 3+6}{3-3} \quad \frac{9-15+6}{0} = \frac{0}{0}$$

$$\frac{\cancel{(x-3)}(x-2)}{\cancel{x-3}} \qquad 3-2 = 1$$

la funç será continua (q' en ppio NO lo es) si para $x=3$ vale 1, ya que es el resultado del límite

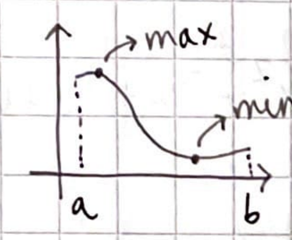
$$f(x)\begin{cases} \dfrac{x^2-5x+6}{x-3} & \text{si } x\neq 3 \\ 1 & \text{si } x\neq 3 \end{cases}$$

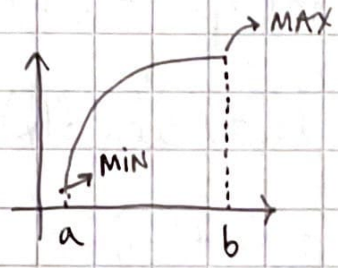
PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CONTINUAS

$f \pm g$ Si las sumo siguen siendo continuas
$f \cdot g$ Si las mult. siguen siendo continuas
$K \cdot f$ Si las mult. x escalar $(K \in \mathbb{R})$
f/g Si las divido siguen siendo continuas (denom $\neq 0$)
$|f|$ Si hago el modulo sigue siendo continua.

TEOREMA DE WEIERSTRASS

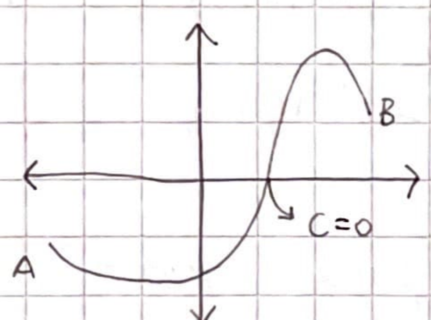
Si la func es continua en intervalo cerrado $[a, b]$ tiene maximo y mínimo.

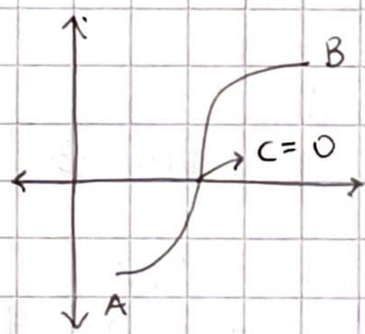




TEOREMA DE BOLZANO

Si una func es continua en un intervalo $[a, b]$ y toma valores de signo opuesto en los extremos, entonces existe al menos un punto C en el intervalo en el que $f(C) = 0$





1) Comprobar si $f(x) = x^3 + x^2 - 7x + 1$ tiene solución en $[0,1]$ (es decir, corta al eje)

Si veo que $f(0)$ y $f(1)$ tienen signos contrarios, corta al eje.

$f(0) = x^3 + x^2 - 7x + 1 = 1$

$f(1) = 1^3 + 1^2 - 7 \cdot 1 + 1$

$1 + 1 - 7 + 1 = -4$

$\exists c \in [0,1]$ tal que $f(c) = 0$

2) ¿Corta al eje X la función $f(x) = x^3 + x^2 - 7x + 1$ en $[-1,0]$?

$f(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 - 7(-1) + 1$

$-1 + 1 + 7 + 1 = 8$

$f(0) = 1$

los 2 positivos, no se puede asegurar nada.

3) ¿Corta la func $f(x) = -x^2 + 1$ al eje X en $[0,2]$? ¿y en $[2,5]$?

$f(0) - x^2 + 1 = 1$

$f(2) - 2^2 + 1 = -4 + 1 = -3$

En $[0,2]$ si corta

$f(5) - x^2 + 1 \quad -5^2 + 1$

$-25 + 1 = -24$

no se puede asegurar

MARZO : DERIVADAS

DEFINICIÓN DE DERIVADA EN UN PUNTO

Derivada en un punto de una funø. Una funø es derivable en un punto cuando existe este límite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

→ Se le llama derivada de f en a y se denota con $f'(a)$.
↳ con apostrofe

DEFINICIÓN DE DERIVADA PARA TODO X

Si sé derivar la funø en un punto, puedo saber qué es derivar una funø en todo el dominio de definiø de dicha funø, es decir, en todo x.

Se llamará **función derivada de f(x)**. La derivada de una funø será otra nueva funø $f'(x)$ dada por este límite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

siempre que exista y extendido a todos los puntos de el dominio de definiø de dicha funø.

CALCULAR DERIVADA EN UN PUNTO aplicando definición

$f(x) = \sqrt{x}$ en $x = 1$

Calcular la derivada en $x = 1$

Calcular lim. cdo $h \to 0$

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

f' en 1 es este límite (definició)

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{1+h} - \sqrt{1}}{h} \xrightarrow{\text{Resuelvo cdo } h \to 0} \frac{\sqrt{1+0} - \sqrt{1}}{0} = \frac{\sqrt{1} - \sqrt{1}}{0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$$

$$\frac{\sqrt{1+h} - \sqrt{1}}{h} \cdot \frac{\sqrt{1+h} + \sqrt{1}}{\sqrt{1+h} + \sqrt{1}}$$

Indeterminació: multiplico y divido x conjugado

$$\frac{(\sqrt{1+h})^2 - (\sqrt{1})^2}{h(\sqrt{1+h} + \sqrt{1})}$$

Identidades notables

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$a = \sqrt{1+h}$ $b = \sqrt{1}$

$$\frac{(1+h) - 1}{h(\sqrt{1+h} + \sqrt{1})} = \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(\sqrt{1+h} + \sqrt{1})} = \frac{1}{\sqrt{1+h} + \sqrt{1}} \to \text{resolver}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{1+h} + \sqrt{1}} = \frac{1}{\sqrt{1+0} + \sqrt{1}} = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

LA DERIVADA DE ESTA FUNCIÓN EN $X = 1$ VALE $\frac{1}{2}$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA

Para cada valor de $h \neq 0$ el número $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ lo que mide es la pendiente de la recta que une los dos puntos

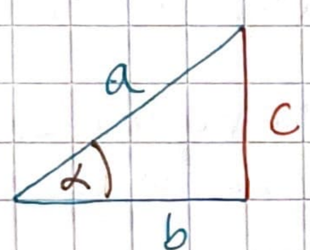
$P(a, f(a)) \longrightarrow$ punto cualquiera en $x=a$ y su imagen

$Q(a+h, f(a+h)) \longrightarrow$ punto muy cercano, $a+h$ y su imagen

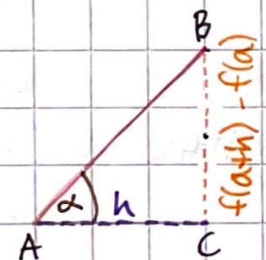
Pueden ocurrir dos cosas:

- → la recta que une P y Q se aproxime a una recta t que intuitivamente es la tangente en P
- → La recta PQ no se aproxime a ninguna recta.

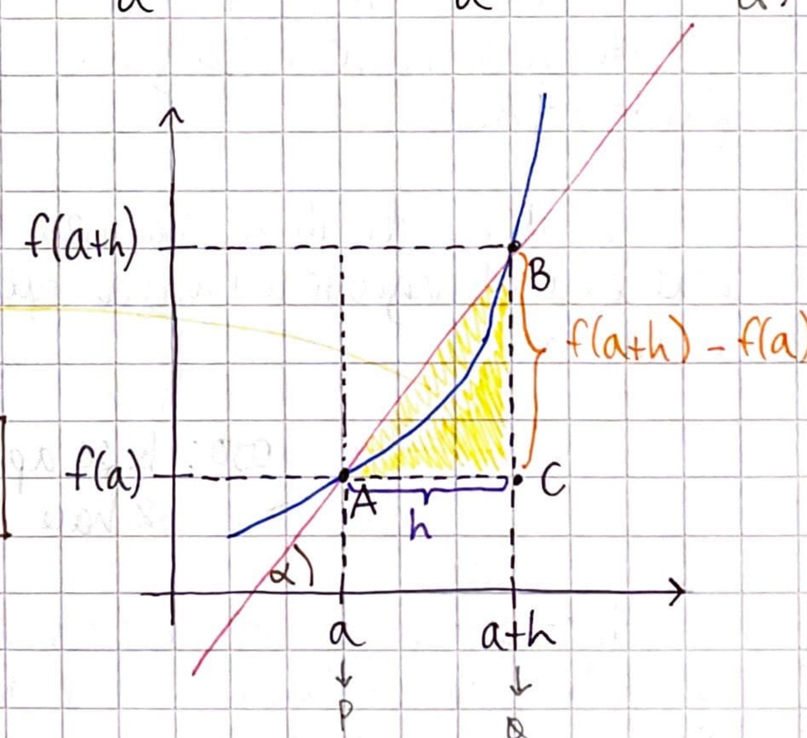
Recordar trigonometría

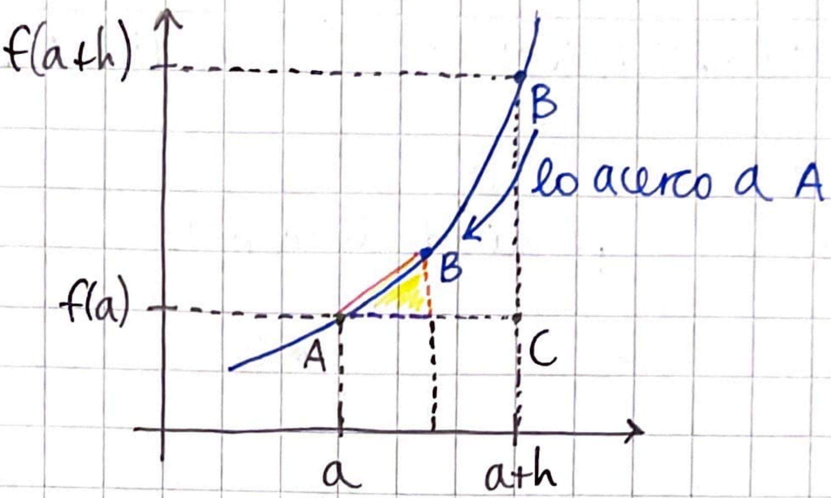


$\operatorname{sen}\alpha = \frac{c}{a}$ $\qquad \cos\alpha = \frac{b}{a}$ $\qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}}{\cos} = \frac{c}{b}$



$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{c}{b} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$





Vuelvo a tener un triángulo y calculo la tg de la misma forma

Cada vez que hago h más pequeño (acerco B a A) vuelvo a tener otro triángulo.

¿Qué ocurre en el límite cuando h tiende a 0? La tangente de α se convertirá en el límite, será igual.

Si A y A' son tan cercanos, la recta que une esos puntos será la recta tangente a la func en el punto x = A.

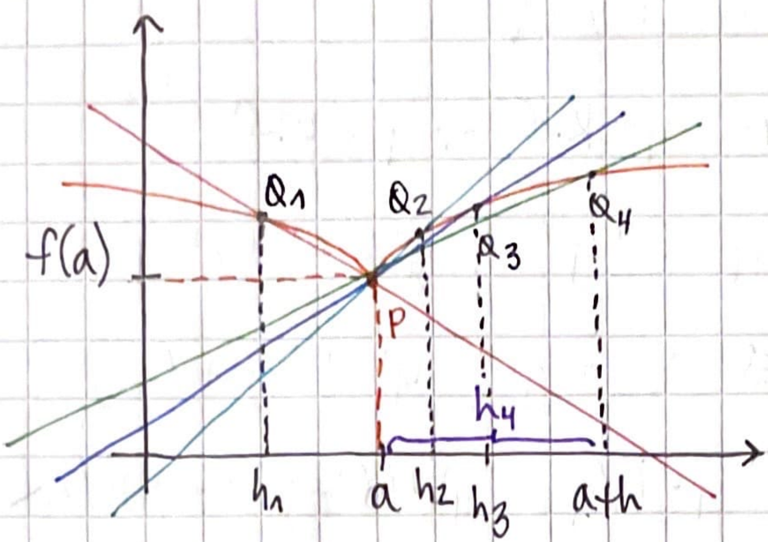
La derivada de la func en x = a es el límite, que es la tangente del ángulo que forma con el eje de las X.

OJO: h se aproxima a a. Lo que se hace 0 es h.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

Entonces, en la interpretac geométrica de la derivada, la derivada de una func nos da el valor de la tangente. Y se acerca a medir la pendiente de la recta tangente a la func en ese punto.

Puede existir otro caso:



P tendrá una coordenada a y una imagen f(a) y tomo un diferencial, un h, por ej. Q4 que será a+h

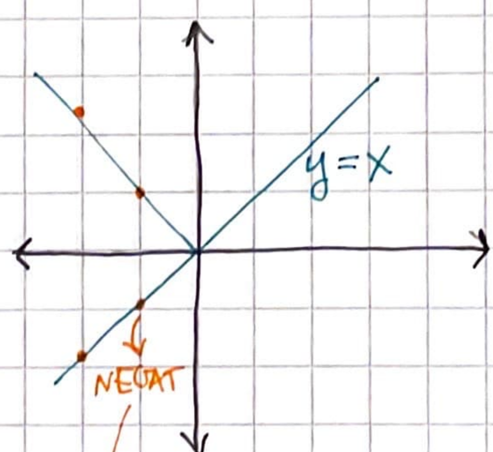
Me acerco mediante la func y tomo el punto Q3, luego Q2 y Q1

Cuando me acerco a P, tanto por dª o por izq. no logro la pendiente que quiero. Puede ser que ese punto no tenga tangente, es decir que no sea derivable.

RECORDAR:
FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO

$$|x| = \begin{cases} x & x > 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

Es ella misma para $x > 0$ y MENOS ella misma para $x < 0$



La func valor absoluto convierte el punto en su homólogo positivo

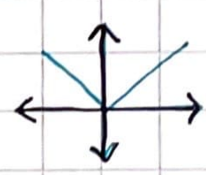


TABLA DE DERIVADAS

OPERACIONES CON FUNCIONES

CONSTANTE POR FUNCIÓN $y = k \cdot f \Rightarrow y' = k \cdot f'$

SUMA DE FUNCIONES $y = f \pm g$ $\quad y' = f' \pm g'$

PRODUCTO DE FUNCIONES $y = f \cdot g$ $\quad y' = f' \cdot g + f \cdot g'$

COCIENTE DE FUNØES $y = f/g$ $\quad y' = (f' \cdot g - f \cdot g') / g^2$

COMPOSIØ DE FUNØES (regla de la cadena) $y = f \circ g$ $\quad y' = f'(g) \cdot g'$

Funciones potenciales (constante en el exponente):

	Simples	Compuestas
CONSTANTE:	$y = k \Rightarrow y' = 0$	
IDENTIDAD:	$y = x \Rightarrow y' = 1$	
INVERSA:	$y = 1/x \Rightarrow y' = -1/x^2$	$y = 1/f \Rightarrow y' = -f'/f^2$
POTENCIA:	$y = x^n \Rightarrow y' = n \cdot x^{n-1}$	$y = f^n \Rightarrow y' = n \cdot f^{n-1} \cdot f'$
RAÍZ:	$y = \sqrt[n]{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$y = \sqrt[n]{f} \Rightarrow y' = \frac{f'}{n \cdot \sqrt[n]{f^{n-1}}}$

Funciones exponenciales (constante en la base):

Simples	Compuestas
$y = a^x \Rightarrow y' = a^x \cdot La$	$y = a^f \Rightarrow y' = a^f \cdot La \cdot f'$
$y = e^x \Rightarrow y' = e^x$	$y = e^f \Rightarrow y' = e^f \cdot f'$

FUNCIÓN ELEVADA A FUNCIÓN: $y = f^g \Rightarrow y' = \underbrace{g \cdot f^{g-1} \cdot f'}_{\text{potencial}} + \underbrace{f^g \cdot Lf \cdot g'}_{\text{exponencial}}$

Funciones logarítmicas:

Simples	Compuestas
$y = \log_a x \Rightarrow y' = \frac{1}{x} \cdot \log_a e$	$y = \log_a f \Rightarrow y' = \frac{1}{f} \cdot \log_a e \cdot f'$
$y = Lx \Rightarrow y' = \frac{1}{x}$	$y = Lf \Rightarrow y' = \frac{1}{f} \cdot f' = \frac{f'}{f}$

Funciones trigonométricas:

Simples	Compuestas
$y = senx \Rightarrow y' = \cos x$	$y = senf \Rightarrow y' = \cos f \cdot f'$
$y = \cos x \Rightarrow y' = -senx$	$y = \cos f \Rightarrow y' = -senf \cdot f'$
$y = tgx \Rightarrow y' = \sec^2 x = 1 + tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$y = tgf \Rightarrow y' = \sec^2 f \cdot f' = (1 + tg^2 f) \cdot f' = = f'/\cos^2 f$
$y = \cot gx \Rightarrow y' = -\cos ec^2 x = -1 - \cot g^2 x = \frac{-1}{sen^2 x}$	$y = \cot gf \Rightarrow y' = -\cos ec^2 f \cdot f' = = (-1 - \cot g^2 f) \cdot f' = -f'/sen^2 f$
$y = arcsenx \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = arcsenf \Rightarrow y' = \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$
$y = \arccos x \Rightarrow y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arccos f \Rightarrow y' = \frac{-f'}{\sqrt{1-f^2}}$
$y = arctgx \Rightarrow y' = \frac{1}{1+x^2}$	$y = arctgf \Rightarrow y' = \frac{f'}{1+f^2}$

CALCULAR LAS SIGUIENTES DERIVADAS

1) $y = \underbrace{\underbrace{4}_{K}\underbrace{x^{-4}}_{\text{funç}}}_{} \underbrace{+}_{\text{SUMA}} \underbrace{\underbrace{2}_{K}\underbrace{x^{-2}}_{\text{funç}}}_{} \underbrace{+}_{\text{SUMA}} \underbrace{\underbrace{\frac{1}{3}}_{K}\underbrace{x^{-3}}_{\text{funç}}}_{}$

← Veo que es una suma de 3 términos

La tabla dice que la derivada es la suma de las derivadas de cada término

TABLA: $y = f^n \Rightarrow y' = n \cdot f^{n-1} \cdot f'$

Tengo K. una funç
4. derivada de x^{-4}

Derivada de x es 1
IDENTIDAD: $y = x \Rightarrow y' = 1$

Primer término: $4x^{-4}$

$4 \cdot -4 \cdot x^{-4-1} \cdot 1$

$-16x^{-5}$

Segundo término $2x^{-2}$

$2 \cdot -2x^{-2-1} \cdot 1$

$-4x^{-3}$

Tercer término $\frac{1}{3}x^{-3}$

$\frac{1}{3} \cdot -3x^{-3-1}$

$\frac{1}{3} \cdot -3x^{-4} = \frac{-3x^{-4}}{3} = -x^{-4}$

$$\boxed{y' = -16x^{-5} - 4x^{-3} - x^{-4}}$$

2) $y = \sqrt{x-3} \cdot \sqrt[3]{2x-3x^2}$

$\downarrow$

PRODUCTO

TABLA: $y' = f' \cdot g + f \cdot g'$

RAÍZ

$y = \sqrt[n]{f} \Rightarrow y' = \dfrac{f'}{n \cdot \sqrt[n]{f^{n-1}}}$

Derivar el primer: $\sqrt{x-3}$

1º derivo lo de dentro: $x-3$

Derivada de $x = 1$ ← Revisar tabla

Derivada de const $= 0$ ← Revisar tabla

$$\frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{f^{n-1}}} = \frac{\overset{1-0\,=\,1}{1}}{2 \cdot \sqrt{x-3^{2-1}}} = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{x-3}}}$$ → Derivada del 1er termino

Derivada 1º POR 2º sin derivar

$$\frac{1}{2\sqrt{x-3}} \cdot \sqrt[3]{2x-3x^2}$$

Derivar el segundo: $\sqrt[3]{2x-3x^2}$

empiezo x abajo: $n \cdot \sqrt[n]{f^{n-1}}$

$$3 \cdot \sqrt[3]{2x-3x^{2\,3-1}} = 3 \cdot \sqrt[3]{(2x-3x^2)^2}$$

en numerador es la derivada de la func: $2x - 3x^2$

es una resta → derivada del 1º menos derivada del 2º

$2x = 2$ //

$3x^2$

$2 \cdot 3x^{2-1}$

$6x$ //

$2-6x$

$f^n \Rightarrow n \cdot f^{n-1}$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x-3}} \cdot \sqrt[3]{2x-3x^2} + \sqrt{x-3} \cdot \frac{2-6x}{3 \cdot \sqrt[3]{(2x-3x^2)^2}}$$

3) $y = \ln^2 (x-2)$

POTENCIA

$f^n \Rightarrow n \cdot f^{n-1} \cdot f'$

$2 \cdot \ln^{2-1} (x-2) \cdot$ derivada en

Derivada de ln = el argumento en denom. y en num. la derivada del argumento

$2\ln(x-2) \cdot \frac{1}{x-2}$

$\frac{1}{(x-2)}$

4) $y = \frac{\ln(2x+3)}{\ln(x^2-1)}$ $\longrightarrow$ Es un cociente. Tabla:

$\frac{Arr' \cdot Ab - Arr \cdot Ab'}{(Ab)^2}$

Derivada arriba: $\ln(2x+3)$

$\frac{1}{2x+3} \cdot 2$

Derivada de 1 constante es 0

Derivar 2x = IDENTIDAD

$y = x \Rightarrow y' = 1$

$y = 2x \Rightarrow y' = 2$

$2x+3$

$2+0 = 2$

Derivada abajo: $\ln(x^2-1)$

$\frac{1}{x^2-1} \cdot 2x$

x^2-1

$2 \cdot x - 0 = 2x$

$y = \ln \Rightarrow y' = \frac{1}{f} \cdot f'$

$$\frac{\frac{1}{2x+3} \cdot 2 \cdot \ln(x^2-1) - \ln(2x+3) \cdot \frac{1}{x^2-1} \cdot 2x}{\ln^2(x^2-1)}$$

$$\frac{\frac{2\ln(x^2-1)}{2x+3} - \frac{2x\ln(2x+3)}{x^2-1}}{\ln^2(x^2-1)}$$

$\cos^2(x)$

$2 \cdot \cos(x) \cdot -\operatorname{sen} x$

$-2\cos(x)\operatorname{sen}(x)$

Es una potencia

Tabla: $\cos x \Rightarrow y' = -\operatorname{sen} x$

$\operatorname{sen}^3 \frac{1}{x}$

$3\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \cos\frac{1}{x} \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right)$

Derivada de $\frac{1}{x} = \frac{-1}{x^2}$ ← Tabla

$\operatorname{sen}(x^4)$

$\downarrow$

derivada de sen es cos

Derivada de x^4

$4x^3$

$\cos(x^4) \cdot 4x^3$

5) $y = e^{\sqrt{x+2}}$

Tabla: $e^f \Rightarrow y' = e^f \cdot f'$

$\sqrt[n]{f} \Rightarrow y' = \frac{f'}{n \cdot \sqrt[n]{f^{n-1}}}$

Derivar $x + 2$

$\downarrow \quad \downarrow$

$1 + 0 = 1$

$\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x+2}} \quad \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$

$y' = e^{\sqrt{x+2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$

6) $\dfrac{e^x}{1+e^x}$

Cociente: $\dfrac{Arr' \cdot Ab - Arr \cdot Ab'}{Ab^2}$

Derivar arriba: $e^x = e^x$

Derivar abajo: $1 + e^x$ $\quad e^x$

$\downarrow \quad \downarrow$

$0 \quad e^x$

$$\frac{e^x \cdot (1+e^x) - e^x \cdot e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

$e^x + \cancel{2e^x} - \cancel{2e^x}$

7) $\cos^2(x^2+1)$

Potencia: $f^n \Rightarrow y' = n \cdot f^{n-1} \cdot f'$

$\downarrow$

$2 \cdot \cos(x^2+1) \cdot (-\operatorname{sen}(x^2+1)) \cdot 2x$

Derivar $x^2 + 1$

$2x + 0 = 2x$

8) $y = \ln(\operatorname{sen} x)$

$\ln f \Rightarrow y' = \dfrac{1}{f} \cdot f' = \dfrac{f'}{f}$

$\dfrac{1}{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x = \operatorname{cotg} x$

9) $\operatorname{sen}(\ln x)$

Derivar sen

Derivar $\ln x = \dfrac{1}{x}$

$\downarrow$

$\cos(\ln x) \dfrac{1}{x}$

10) $sen(sen\,x)$

$\cos(sen\,x)\cdot\cos x$

Regla de la cadena

$y' = f'(g)\cdot g'$

DERIVADA N-ÉSIMA

Dada una func, derivarla sucesiva/. n veces.

Derivada n-esima de $f(x)$ es la derivada de func $f^{n-1}(x)$, es decir $f^{n}(x) = (f^{n-1})'(x)$ para cualquier nº natural mayor que 1.

1) Calcular la derivada n-esima de

$y = sen(x)$

$y' = \cos(x)$ ← 1ª derivada

$y'' = -sen(x)$ ← 2ª derivada

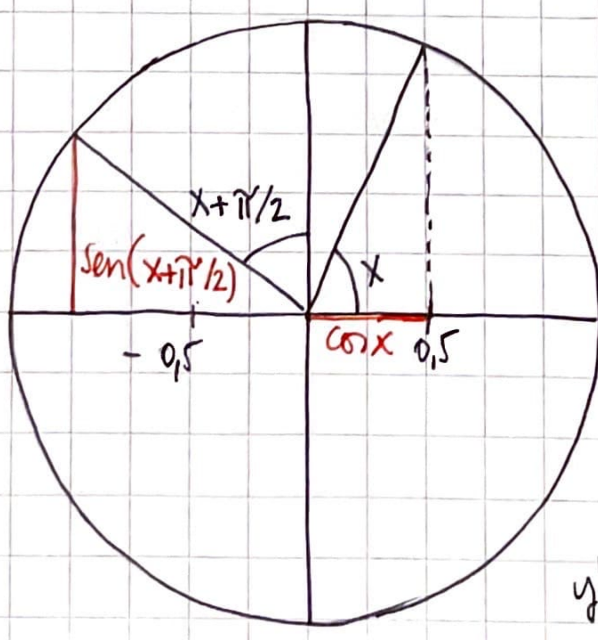
$y''' = -\cos(x)$ ← 3ª derivada

$y^{4'} = sen(x)$ ← 4ª deriv. $-\cos(x)\cdot -sen\,x = +sen$

La 4ª deriv. es igual que la 1ª y se repite

↓

Ley de recurrencia p calcular la derivada n-esima de esta func.



$\cos x = sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ $n=1$

$-sen\,x = sen(x+\pi)$ $n=2$

$-\cos x = sen\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$ $n=3$

$sen(x) = sen(x+2\pi)$ $n=4$

$y^{n} = sen\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$

18 MARZO

APLICACIONES DE LA DERIVACIÓN DE FUNCIONES

DERIVADAS LATERALES

Si $f(x)$ es continua en a y existe $\lim_{x \to a^-} f'(x) = b$

podemos decir que $f'(a^-) = b$

Si $f(x)$ es continua en a y existe $\lim_{x \to a^+} f'(x) = b$

podemos decir que la derivada de la func f en $x = a^+$ vale b

$f'(a^+) = b$

CUANDO ES DERIVABLE UNA FUNCIÓN Cuando es derivable x ambos lados. Busco la derivada de una func en 1 punto, supongamos $x = a$. A ese punto me puedo acercar x derecha o por izq. Si veo si la func es derivable en ese punto cdo me acerco x dª y por izq. y ambos límites coinciden ⇒ la func es derivable.

El valor de la derivada en esa func en $x = a$ valdrá b, el valor del límite.

Si $f(x)$ es continua en a y $\lim_{x \to a^-} f'(x) = \lim_{x \to a^+} f'(x) = b$

entonces $f'(a) = b$

CUÁNDO UNA FUNCIÓN NO ES DERIVABLE Cuando los límites son distintos

... OTRA FORMA ...

Si $f(x)$ es continua en a y existe $\lim_{x \to a^-} f'(x) = b$

entonces podemos decir que $f'(a^-) = b$

Ese límite es $\Rightarrow$

$$\underbrace{f'(a^-)}_{\text{Derivada de } f \text{ en pto } a \text{ x izq.}} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Y es equivalente a decir que:

$$f'(a^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

→ EJERCICIO TÍPICO DE EXAMEN Estudiar la continuidad y derivabilidad

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

① f no definida como $x = 0$, o sea constante 0, si x es menor que 0. Y cdo llega a 0 se mueve como $y = x$

① Comprobar continuidad: lim cuando x tiende a 0 por la izq. vale 0

El lim cdo x tiende a 0 por la derecha tb. vale 0.

Existen ambos límites y son iguales $\Rightarrow$ es continua.

$\exists \lim_{x \to 0} f(x)$ es 0

$f(0)$ existe $= 0$ (lo toma la segunda rama ≥ 0)

$$f(x)\begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ x & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

CONTINUIDAD:

i) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim 0 = 0$

ii) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} x = 0$

iii) $f(0) = 0$

② DERIVABILIDAD: Se comprueba con las derivadas laterales

i) $f'(0^-)$ $\dfrac{f(0+h) - f(0)}{h}$ $\dfrac{0 - 0}{h} = \dfrac{0}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} 0 = 0$

ii) $f'(0^+) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{h - 0}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{h}{h} = 1$

Las derivadas laterales no son iguales, la función NO ES DERIVABLE.

Si existen las derivadas laterales y son iguales, la función PUEDE SER derivable (puede que no).
Si existen las derivadas y son distintas la función es NO DERIVABLE.

Si no existen las derivadas o son iguales, hay que utilizar el límite.

$$\lim_{h \to 0^{-}\,0^{+}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

OTRO TIPO DE EJERCICIO:

CALCULAR LOS PARÁMETROS PARA QUE $f(x)$ SEA DERIVABLE EN $x=1$

$$f(x) = \begin{cases} ax^2+b & \text{Si } x \leq 1 \\ \ln(x) & \text{Si } x > 1 \end{cases}$$

← Parabola, continua, derivable
← El argumento debe ser > 0, pero aquí dicen q es a partir de 1

Ambas ramas son continuas y derivables sin problema. El problema podría estar en el 1, donde se juntan.

① CONTINUIDAD: lim. x izq. y x derecha y los igualamos xq quiero que la func sea continua.

$$\lim_{x \to 1^-} (ax^2+b) = (a \cdot 1^2 + b) = a+b$$

$$\lim_{x \to 1^+} \ln(x) = \ln(1) = 0$$

Lo que tiene q pasar es q los límites sean iguales, es decir, $a+b=0$

Y además $f(1)$ tiene q valer lo mismo p q la func sea continua.

$$f(1) = a+b$$

② DERIVABILIDAD.

Por izq ⇒ $\lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{a(1+h)^2+b-(a+b)}{h} =$

$a(1+h)(1+h)$

$1+h+h+h^2 = (1+2h+h^2)a$

$a+2ah+ah^2$

$$\frac{a + 2ah + ah^2 + b - (a+b)}{h} \quad \frac{2ah + ah^2}{h} \quad \frac{ah(2+h)}{h}$$

$$2a + ah$$

$$\lim_{h \to 0} 2a + ah = 2a + a \cdot 0 = 2a$$

$$2a + 0$$

Br ... $\rightarrow \lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\ln(1+h) - \ln(1)}{h}$

¿? Donde había x ahora
voy ln x

INFINITESIMOS!!

$$(1+h) - 1 = \frac{h}{h} = 1$$

Entonces, teníamos

$a + b = 0 \rightarrow$ de la continuidad

$2a = 1 \rightarrow$ derivada lateral d.ª = a la de izq

$$\begin{cases} a+b = 0 \\ 2a = 1 \end{cases} \rightarrow a = \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{2} + b = 0$$

$$b = -\frac{1}{2}$$

Sustituyo en función valor de a y de b

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } x \leq 1 \\ \ln(x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} & \text{si } x \leq 1 \\ \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

PROPIEDAD

Si una función $f(x)$ es derivable en a, entonces $f(x)$ es continua en ese punto.

Derivable implica continua
Continua NO IMPLICA derivable.

Estudiar continuidad y derivabilidad

$$f(x) \quad \begin{cases} x^2 - 5 & x < 2 \\ \dfrac{x^2 + 4x}{2} & x \geq 2 \end{cases}$$

① Calcular continuidad de la func = limite cdo x tiende a 2 de y u de las ramas (izq. y der)

$$\lim_{x \to 2^-} x^2 - 5 \qquad 2^2 - 5 \qquad 4 - 5 = -1$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 + 4x}{2} \qquad \frac{2^2 + 4 \cdot 2}{2} \qquad \frac{4 + 8}{2} = 6$$

NO ES CONTINUA, POR LO TANTO NO ES DERIVABLE

Derivada para todo x

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Estudiar continuidad y derivabilidad

$$f(x)\begin{cases} x^2+2 & x<2 \\ \dfrac{x^2+4x}{2} & x\geq 2 \end{cases}$$

CONTINUIDAD

$$\lim_{x\to 2^-} x^2+2 = 2^2+2 = 6$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{2^2+4\cdot 2}{2} = \frac{4+8}{2} = 6$$

→ Es continua, los límites existen y son iguales.

DERIVABILIDAD → hago las derivadas

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x<2 \\ \dfrac{2x+4}{2} & x>2 \end{cases}$$

$$f'(2^-) = 2\cdot 2 = 4$$

$$f'(2^+) = \frac{2\cdot 2+4}{2} = \frac{4+4}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

f(x) es derivable para todo $\mathbb{R}$

¿?
*

Se pueden hacer las derivadas laterales

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0^-} (2+h)^2+2$$

REGLA DE L'HOPITAL

Si f y g son CONTINUAS y DERIVABLES, tales que $\lim_{x \to a} f(x)$ es igual a $\lim_{x \to a} g(x)$ y es 0, o bien ambos límites son infinito, entonces el lim. cdo x tiende a a de $\frac{f(x)}{g(x)}$ (que sería $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, indeterminado) es igual al límite cdo x tiende a a de la derivada del numerador POR SU CUENTA y del denom POR SU CUENTA. (NO de la derivada del cociente)

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Se usa para las indeterminados $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$. Claro que existen más indeterminados, como: 0^0, ∞^0, $0 \cdot \infty$, 1^∞ hay q̀ tratar de transformarlas a alguna de las indeterminados $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ p̀ poder usar L'Hopital

Ejemplo:

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1-\cos x)\operatorname{sen} x}{x^2} = \frac{(1-1)\,0}{0^0} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{INDETERMINADO}$$

→ INFINITÉSIMO

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^2}{2} \cdot \operatorname{sen} x}{x^2} = \frac{\cancel{x^2} \operatorname{sen} x}{\cancel{x^2}\, 2} = \frac{\operatorname{sen} x}{2} \to \text{sustituyo } \frac{\operatorname{sen} 0}{2} = \frac{0}{2} =$$

→ otra forma de resolver

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1-\cos x)\operatorname{sen} x}{x^2} = \frac{0}{0}$$

lo de arriba y abajo son funciones continuas y derivables → L'Hopital

L' Hopital indica que hay que hacer la derivada del numerador x su cuenta y la del denominador x su cuenta:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)\,\text{sen}x}{x^2} = \frac{\text{sen}^2x + \cos x - \cos^2 x}{2x}$$

$(1-\cos x)\,\text{sen}x \to$ producto $\quad f'\cdot g + g'\cdot f$

$\underbrace{\text{sen}x \cdot \text{sen}x}_{\text{sen}^2 x} + \cos x \cdot (1-\cos x)$

$+ \cos x - \cos^2 x$

SUSTITUYO

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}^2x + \cos x - \cos^2 x}{2x} = \frac{0+1-1}{2\cdot 0} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{INDETERMINADO}$$

siguen siendo continuas y derivables, aplico L' Hopital otra vez

Derivar: $\text{sen}^2x \longrightarrow 2\cdot\text{sen}x\cdot\cos x$ $\quad f^n \Rightarrow n\cdot f^{n-1}\cdot f'$

Derivar: $\cos x \longrightarrow -\text{sen}x$ $\quad \dfrac{2\,\text{sen}x\cos x - \text{sen}x + 2\cos x\cdot\text{sen}x}{2}$

Derivar: $-\cos^2x \longrightarrow 2\cdot -\cos x \cdot -\text{sen}x$

SUSTITUYO

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\,\text{sen}x\cos x - \text{sen}x + 2\cos x\cdot\text{sen}x}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

$\lim_{x \to 0^+} x^{\frac{1}{Lx}}$ $\quad 0^{\frac{1}{L0^+}} = 0^{-\frac{1}{\infty}} = 0^0 \Rightarrow$ INDETERMINADO

A esto lo llamo A

Tomo Ln de A y luego tendría que tomar la operación contraria, que es la exponencial e. Si tomo el logaritmo y luego pongo la e y lo elevo al logaritmo es como no hacer nada. Con lo cual, al calcular el resultado final, mientras le ponga la e por delante ya está.

$LA = L \lim_{x \to 0^+} x^{\frac{1}{Lx}}$ → El exponente baja multiplicando a la base

$LA = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{Lx} Lx = \lim_{x \to 0^+} = 1$ → es LA, el logaritmo de ese límite es 1

Por tanto si pongo una e, elevado a 1 es lo mismo que e^{LA} → e elevado a logaritmo de A

$\lim_{x \to 0^+} x^{\frac{1}{Lx}} = e^1 = e$

RECORDAR PROPIEDADES LOGARITMO

$\ln 1 = 0 \quad \ln e = 1 \quad \ln e^n = n$

$\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$

$\ln(x/y) = \ln(x) - \ln(y)$

$\ln x^n = n \cdot \ln(x)$

¿Cuando sustituir? Cuando hay indeterminación 0^0

Si tengo $\ln(7)$ es un valor, no sé cual es.

Pero puedo saber cuanto vale $e^{\ln(7)}$

e y ln se cancelan, queda 7

$$\lim_{x\to 2} \frac{e^x(x^2-x-2)}{2x^2-8x+8} = \frac{e^2(2^2-2-2)}{2\cdot 2^2-8\cdot 2+8} = \frac{e^2\cdot 0}{0} = \frac{0}{0} = \text{IND.}$$

L'Hopital → derivar % por su cuenta

$e^x(x^2-x-2)$ → OJO, producto $f'\cdot g + f\cdot g'$

$e^x\cdot(x^2-x-2) + e^x\cdot(2x-1)$

43.25
INFINITO

$2x^2-8x+8 \rightarrow 2\cdot 2x-8$
$4x-8$

$$\lim_{x\to 2} \frac{e^x(x^2-x-2)+e^x(2x-1)}{4x-8}$$

$$\frac{e^2(2^2-2-2)+e^2(2\cdot 2-1)}{4\cdot 2-8} = \frac{3\cdot e^2}{0}$$

Depende de si me acerco x izq. o x dª este 0 es -algo o +algo.

Si cojo al 2 por la dª → 2,1 y evalúo
$4\cdot 2{,}1-8 = 0{,}4$ → positivo

Si me acerco a 2 por izq → 1,9 y evaluo
$4\cdot 1{,}9-8 = -0{,}4$ → negativo

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{3\cdot e^2}{0^-} = -\infty$$

El límite NO EXISTE

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{3\cdot e^2}{0^+} = +\infty$$

MONOTONÍA Y EXTREMOS RELATIVOS

TEOREMA: Si una func es derivable en a entonces

Si $f'(a) > 0$, f es creciente en a
Si $f'(a) < 0$, f es decreciente en a
Si $f'(a) = 0$, f puede presentar un maximo o un mínimo relativo en a.

Dada la función $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 7$

- Sabemos que en $x=0$ su recta tangente es horizontal
- Que tiene un extremo relativo en $x = -2$ y que pasa por $P(1,0)$

Hallar a, b, c y estudiar extremos y monotonía

Si la tangente es horizontal la pendiente vale 0. Sé que m es 0. m es f' de la func, en $x=0$

$$f'(0) = 0$$

$$f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c$$
$$f'(0) = 0 + 0 + 0 + c$$
$$f'(0) = c$$

→ y ya sabíamos que c es 0

La siguiente condición es que pasa por (1,0), eso quiere decir que cumple la func, es decir, f(1) tiene que ser 0

$$(\underset{x}{1}, \underset{y}{0})$$

$$f(1) = 1^4 + a\,1^3 + b\,1^2 + 0\cdot 1 + 7 = 0$$
$$1 + a + b + 7 = 0$$
$$a + b = -8$$

Si hay un extremo relativo en $x = -2$, nos dicen que la primera derivada en $x = -2$ es igual a 0, se anula

Primera derivada ya la tenemos

$f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx$

$f'(-2) = 4(-2)^3 + 3 \cdot a(-2)^2 + 2 \cdot b(-2)$

$4 \cdot -8 + 12a - 4b$

$-32 + 12a - 4b = 0$

Tenemos un sistema:

$a + b = -8 \quad \cdot 4$

$12a - 4b = 32$

$4a + 4b = -32$

$12a - 4b = 32$

$16a = 0$

$a = \frac{0}{16}$

$a = 0$ Los pongo en la funcion

$0 + b = -8$

$b = -8$

$f(x) = x^4 - 8x^2 + 7$

y la funcion derivada

$f'(x) = 4x^3 - 16x$

$A = 0$

$B = -8$

$C = 0$

MONOTONIA: Estudio el signo de la 1ª derivada

La funcion es $f(x) = x^4 - 8x^2 + 7$

La 1ª derivada $f'(x) = 4x^3 - 16x \longrightarrow$ Para ver signo igualar a 0

Sacamos donde se anula y veo q ocurre en los tramos entre medio

$4x^3 - 16x = 0$

$x_1 = 2$

$x_2 = -2$

$x_3 = 0$

En estos puntos se anula la 1ª derivada

Para ver si es máximo o mínimo estudio la 2ª derivada:

$f''(x)$ $3 \cdot 4x^2 - 16$

$12x^2 - 16$ → y meto los valores q' anulan la 1ª derivada:

$f''(0) = 12 \cdot 0 - 16 = -16 < 0$ menor q' 0 = MAX $(0,7)$

$f''(2) = 12 \cdot 2^2 - 16 = 32 > 0$ mayor q' 0 = MIN $(2,-9)$

$f''(-2) = 12 \cdot (-2)^2 - 16 = 32 > 0$ = MIN $(-2,-9)$

↘ ↗ ↘ ↗

$-\infty$ -2 0 2 $+\infty$

estudio un punto, ej. -3 y sustituyo en 1ª derivada

$f'(-3) = 4x^3 - 16x$

$4 \cdot (-3)^3 - 16 \cdot (-3)$

$f'(-3) = -60$

↓

signo negat. descendiente

↘

$x(-1)$

$f'(-1) = 4 \cdot (-1)^3 - 16 \cdot (-1)$

$f'(-1) = 12$

↓

Positivo

↗

$f'(1) = 4 \cdot 1^3 - 16 \cdot 1$

$f'(1) = -12$

$f'(3) = 4 \cdot 3^3 - 16 \cdot 3$

$f'(3) = 60$

Extremos $x^4 - 8x^2 + 7$ $(0,7)$

$f(0) = 0^4 - 8 \cdot 0^2 + 7$

$f(0) = 7$

$f(2) = 2^4 - 8 \cdot 2^2 + 7 = -9$ $(2,-9)$

$f(-2) = (-2)^4 - 8 \cdot (-2)^2 + 7 =$

$16 - 8 \cdot 4 + 7 = -9$ $(-2,-9)$

CONCAVIDAD Cuando la curva está x encima de la tangente en un entorno de a $\cup$

Si la segunda derivada en a es mayor que 0 la func es cóncava

$f''(a) > 0$, f es cóncava $\cup$

CONVEXA Si la curva está x debajo de la tangente en un entorno del punto a es convexa $\cap$

Si la segunda derivada en a es menor que 0 la func es convexa

$f''(a) < 0$, f es convexa $\cap$

El signo de la 1ª derivada: MONOTONÍA
El signo de la 2ª derivada: CONCAVIDAD

Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0$ entonces $P(a, f(a))$ es MIN relativo
Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0$, entonces $P(a, f(a))$ es MAX relativo

$f(x) = \frac{x^4+3}{x}$ Dominio $= \mathbb{R} - \{0\}$

Extremo relativo: Calculo derivada → aquí es cociente, (no es L'Hôpital)

Cociente: $(f' \cdot g - f \cdot g')/g^2$

f' $4x^3$

g' 1

$$\frac{4x^3 \cdot x - (x^4+3) \cdot 1}{x^2}$$

$$4x^4 - (x^4+3) \cdot 1 \quad 4x^4 - x^4 - 3 = \frac{3x^4 - 3}{x^2}$$

Para obtener puntos posibles de MAX y MIN, igualo a 0

$$\frac{3x^4-3}{x^2}=0$$

$$3x^4-3=0\cdot x^2$$

$$3x^4=3$$

$x^4=1 \longrightarrow x=\pm 1 \longrightarrow$ Posibles puntos críticos

Segunda derivada $\quad (f'\cdot g - f\cdot g')/g^2$

$$\frac{12x^3}{2x} \qquad \frac{(12x^3\cdot x^2)-(3x^4-3)\cdot 2x}{(x^2)^2}$$

$$\frac{12x^5-6x^4-6x}{2x^4} \qquad \frac{6x(2x^4-x^4-1)}{2x^4}$$

$$\frac{6x(x^4-1)}{x^2\cdot x^2}$$

$$\frac{6(x^4-1)}{x^3}=\frac{6x^4-6}{x^3}$$

¿? *

$$\frac{x^4+3}{x}$$

$f''(1) \quad \frac{6\cdot 1^4-6}{1}=\frac{0}{1}=0$

$f''(-1) \quad \frac{6\cdot(-1)^4-6}{1}=\frac{0}{1}=0$

Puntos $\rightarrow$ Reemplazo en 1° func $\frac{x^4+3}{x}$

$f(1)=\frac{1^4+3}{1}=4 \qquad (1,4)$

$f(-1)=\frac{1+3}{-1}=-4 \qquad (-1,-4)$

EXTREMOS RELATIVOS

$f(x) = x^6$

$f'(x) = 6x^5$ ← Primera derivada

$6x^5 = 0 \quad x = 0$ ← Igualo a 0 donde $x = 0$. Único posible punto crítico $x = 0$

$f''(x) = 30x^4 \qquad f''(0) = 30 \cdot 0^4 = 0$

$f'''(x) = 120x^3 \qquad f'''(0) = 120 \cdot 0^3 = 0$

$f''''(x) = 360x^2 \qquad f''''(0) = 360 \cdot 0^2 = 0$

$f^{5)}(x) = 720x \qquad f^{5)}(0) = 720 \cdot 0 = 0$

$f^{6)}(x) = 720 \qquad f^{6)}(0) = 720 > 0$ → MÍNIMO

Decíamos
Mayor 0 = min
Menor 0 = max
Igual 0 = seguir derivando

Luego $x = 0$ presenta un MIN relativo

$f(x) = 3x^3 - 18x^2 + 36x - 24$

$f'(x) = 9x^2 - 36x + 36 = 0$ ← 1ª derivada e igualo a 0 p/ encontrar pts críticos

$x = 2$

2ª derivada en 2

$f''(x) = 18x - 36 \qquad f''(2) = 18 \cdot 2 - 36 = 0$

$f'''(x) = 18 \qquad f'''(2) > 0$ → mayor a 0 → MÍNIMO

OJO!! $x = 2$ NO es un extremo, porque la 1ª derivada NO NULA es de orden IMPAR (3ª deriv.)

NORMA GENERAL

Supongamos si 1ª derivada en 1 punto se anula, la siguiente tb. y así hasta la K-1esima derivada también se anula, pero hay una que ya no se anula, la Kesima derivada es distinta de 0, todas las anteriores son igual a 0

$f'(a) = 0$

$f''(a) = 0$ ....

$f^{K-1}(a) = 0$

$f^{K}(a) \neq 0$

se verifica que:

Si K es par, entonces $\begin{cases} f^{K}(a) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ tiene MIN en a} \\ f^{K}(a) < 0 \Rightarrow f(x) \text{ tiene MAX en a} \end{cases}$

Si K es impar, entonces en $x = a$ NO HAY EXTREMO.

OPTIMIZACIÓN

Son problemas donde hay que maximizar o minimizar una func.

Ej. Calcular los números reales positivos tales que $x+y = 10$ y que el producto $p = x^2 y$ sea máximo.

$p = x^2 y$ ← Función objetivo, la func. q' quiero maximizar

Ecuación de ligadura: $x+y = 10$

Despejo y: $y = 10 - x$

Reemplazo: $p = x^2(10-x) = 10x^2 - x^3$

↳ Consigo una func. solo con x

Quiero que sea un MAXIMO = 1ª derivada igual a 0
2ª derivada negativo (menor a 0)

$P = 10x^2 - x^3$

$P' = 20x - 3x^2 = 0$ → Obtengo posibles puntos

$x_1 = \frac{20}{3}$

$x_2 = 0$

} Para ver si son MAX o MIN, segunda derivada

$P'' = 20 - 6x$

$P''(0) = 20 - 6 \cdot 0 = 20 > 0$ → se minimiza

$P''\left(\frac{20}{3}\right) = 20 - 6 \cdot \frac{20}{3} = -20 < 0$ → se maximiza

Es la que quiero porque quería maximizar

$\frac{20}{3}$ es el valor que busco que hace que ese producto $x^2 y$ sea maximo

$y = 10 - \frac{20}{3}$ $\quad y = \frac{10}{3}$

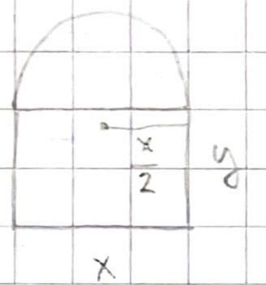
Con $x = \frac{20}{3}$ e $y = \frac{10}{3}$ el producto $x^2 y$ es MÁXIMO

ACTIVIDAD 1 Grupo 5

Se desea construir una ventana con forma de rectángulo coronado de un semicírculo de diámetro igual a la base del rectángulo. Ponemos cristal blanco en la parte rectangular y cristal de color en el semicírculo.

Sabiendo que el cristal coloreado deja pasar la mitad de luz (por unidad de superficie) que el blanco, calcula las dimensiones de la ventana para conseguir la máxima luminosidad si se ha de mantener un perímetro constante dado.

Dar dimensiones del rectángulo (base y altura), así como el radio del semicírculo.



PERIMETRO CIRCULO: $2\pi \cdot r$

SEMICIRCULO: $\pi \cdot r$

PERIMETRO SEMICIRC.: $\pi \cdot \frac{x}{2}$

PERIMETRO RECTANGULO: base · altura

$\downarrow \quad \downarrow$

$x \quad y$

P. RECT. $x+2y$

1 sola base xq la otra ya está considerada en el perímetro del semicírculo

PERIMETRO TOTAL: $\frac{\pi \cdot x}{2} + x + 2y$

(1)

CALCULAR AREA:

Area circulo πr^2

Area rect. $x \cdot y$

semicirculo $\frac{1}{2}\pi \cdot r^2$

$\frac{1}{2}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2$

$\frac{1}{2}\pi\frac{x^2}{4} = \frac{\pi x^2}{8}$ ⟸ Area semicirculo

$\frac{\pi x^2}{16}$ → Mitad de luz

AREA RECTANGULO: $x \cdot y$

AREA TOTAL (2) $(x, y) = \frac{\pi x^2}{16} + xy$

Despejar y del perimetro total (1)

$P = \frac{\pi \cdot x}{2} + x + 2y$

$P - \frac{\pi x}{2} - x = 2y$

$\frac{\frac{P}{1} - \frac{\pi x}{2} - \frac{x}{1}}{2} = y$

$\frac{P}{2} - \frac{\pi x}{4} - \frac{x}{2} = y$ (3)

Factor comun

$x\left(\frac{-\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) + \frac{P}{2} = y$ → (3)

(2)

Sustituimos en Area, para que Area quede en fnc de x

$A(x) = \frac{\pi x^2}{8} + x\left[x\left(\frac{-\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) + \frac{P}{2}\right]$

$x\left(\frac{P}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = \frac{P}{2}x - \frac{\pi}{4}x - \frac{x^2}{2}$

$$A(x) = \frac{\pi x^2}{8} + \frac{P x}{2} - \frac{\pi x}{4} - \frac{x^2}{2}$$